نام و نام خانوادگی : .....

شماره دانشجویی : .....

نام مدرس : .....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۹۲/۸/۱۵**

وقت : **۷۰** دقیقه

دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم درس : **ریاضی۱-فنی (۱۵ گروه هماهنگ)**

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۳۹۳- ۱۳۹۲**

توجه : مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

سوال ۱ - تمام مقادیر z را بیابید بطوریکه : $z^{۳} = ۱ + \frac{۱+i}{۱-i}$ ۱۵ نمره

سوال ۲ - اگر $f(x) = \begin{cases} x+۲ & x \le ۰ \\ -\frac{۱}{x} & x > ۰ \end{cases}$ ، تابع $f \circ f$ را بیابید. ۱۵ نمره

سوال ۳ - بدون استفاده از هم‌ارزی و قاعده هوپیتال ، حد زیر را محاسبه کنید : ۱۵ نمره

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۳}} \frac{۲\sin x - \sqrt{۳}}{۳x - \pi}$$

سوال ۴ - الف) مشتق بگیرید : $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\cos x + \sqrt{x}}}$ ۱۰ نمره

ب) فرض کنید : $f(x) = \sin x + \sqrt{۳}\cos x \quad , \quad x \in [\frac{\pi}{۶}, \pi]$

معادله خط مماس بر نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ در نقطه $(\sqrt{۳}, \pi/۳)$ واقع بر آن را بنویسید. ۱۰ نمره

سوال ۵ - نقطه M (در ناحیه اول دستگاه مختصات) بر روی منحنی $y^{۲} = ۲x - x^{۲}$ واقع است.

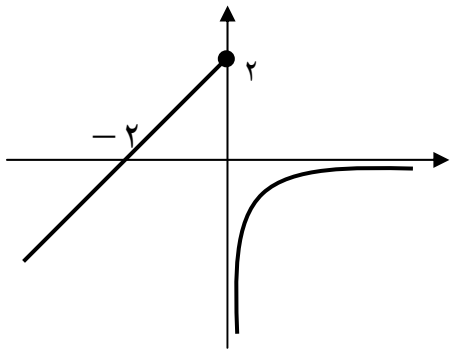
از نقطه M دو عمود بر محورهای مختصات رسم می کنیم و مستطیلی را می سازیم که مبدا مختصات و نقطه M دو راس آن هستند.

نقطه M را چنان بیابید که مساحت این مستطیل بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. ۱۵ نمره

موفق باشید

جواب سوال۱ : ابتدا عبارت را به ساده ترین صورت می نویسیم : $z^{۳} = ۱+\frac{۱+i}{۱-i} = \frac{۲}{۱-i} = ۱+i = \sqrt{۲}e^{\frac{\pi}{۴}i}$

$z_{۰} = \sqrt[۶]{۲}e^{\frac{\pi}{۱۲}i}$ یک مقدار مناسب برای z است. تمام مقادیر z عبارتند از : $z_k = e^{(\frac{\pi}{۱۲}+\frac{۲k\pi}{۳})i}$, $k = ۰,۱,۲$



جواب سوال۲ : داریم :
$$f \circ f(x) = \begin{cases} f(x)+۲ & f(x) \le ۰ \\ -\frac{۱}{f(x)} & f(x) > ۰ \end{cases}$$

بنابر این باید ناحیه هایی را مشخص کنیم که در آنها $f(x) > ۰$ و یا $f(x) \le ۰$.

اگر $x > ۰$ آنگاه $f(x) = -\frac{۱}{x}$ یعنی $f(x) < ۰$.

اگر $x \le ۰$ آنگاه $f(x) = x+۲$ بنابر این $\begin{cases} f(x) \le ۰ & x \le -۲ \\ f(x) > ۰ & -۲ < x \end{cases}$.

$$f \circ f(x) = \begin{cases} f(x)+۲ & x \le -۲ \quad ۰ < x \\ -\frac{۱}{f(x)} & -۲ < x \le ۰ \end{cases} \rightarrow f \circ f(x) = \begin{cases} x+۴ & x \le -۲ \\ -\frac{۱}{x+۲} & -۲ < x \le ۰ \\ -\frac{۱}{x}+۲ & ۰ < x \end{cases}$$

جواب سوال۳ : روش اول : با تغییر متغیر $x = t+\frac{\pi}{۳}$ داریم :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{۲\sin x-\sqrt{۳}}{۳x-\pi} = \lim_{t\to ۰} \frac{۲\sin(x+\pi/۳)-\sqrt{۳}}{۳(x+\pi/۳)-\pi} = \lim_{t\to ۰} \frac{\sin x+\sqrt{۳}\cos x-\sqrt{۳}}{۳x} = \lim_{t\to ۰}(\frac{\sin x}{۳x}+\frac{\cos x-۱}{\sqrt{۳}x})$$

$$= \lim_{t\to ۰}(\frac{\sin x}{۳x}-\frac{\sin^{۲} x}{\sqrt{۳}x(\cos x+۱)}) = \frac{۱}{۳}\lim_{t\to ۰}\frac{\sin x}{x} - \lim_{t\to ۰}(\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{\sqrt{۳}(\cos x+۱)}) = \frac{۱}{۳}\times ۱ - ۱\times\frac{۰}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۳}$$

روش دوم :
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{۲\sin x-\sqrt{۳}}{۳x-\pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{۲(\sin x-\sqrt{۳}/۲)}{۳x-\pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{۲(\sin x-\sin(\pi/۳))}{۳(x-\pi/۳)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{۴\sin(x/۲-\pi/۶)\cos(x/۲+\pi/۶)}{۳(x-\pi/۳)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{\sin(x/۲-\pi/۶)}{(x/۲-\pi/۶)}\times\frac{۲\cos(x/۲+\pi/۶)}{۳} = ۱\times\frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

روش سوم :
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{۲\sin x-\sqrt{۳}}{۳x-\pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{۲(\sin x-\sqrt{۳}/۲)}{۳x-\pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{۲(\sin x-\sin(\pi/۳))}{۳(x-\pi/۳)} = \frac{۲}{۳}\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{\sin x-\sin(\pi/۳)}{x-\pi/۳}$$

طبق تعریف مشتق ، این حد برابر مقدار مشتق تابع $\sin x$ در نقطه $x = \pi/۳$ است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{۲\sin x-\sqrt{۳}}{۳x-\pi} = \frac{۲}{۳}(\sin x)'|_{x=\pi/۳} = \frac{۲}{۳}(\cos x)|_{x=\pi/۳} = \frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳}$$

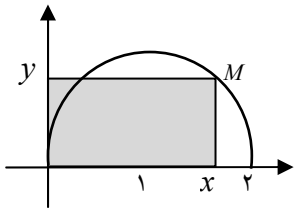
جواب سوال۴ : الف)

$$y' = \frac{۱}{۲\sqrt{\sin x + \sqrt{\cos x + \sqrt{x}}}} \times (\cos x + \frac{۱}{۲\sqrt{\cos x + \sqrt{x}}} \times (-\sin x + \frac{۱}{۲\sqrt{x}}))$$

$$= \frac{\cos x}{۲\sqrt{\sin x + \sqrt{\cos x + \sqrt{x}}}} - \frac{\sin x}{۴\sqrt{\cos x + \sqrt{x}}\sqrt{\sin x + \sqrt{\cos x + \sqrt{x}}}} + \frac{۱}{۸\sqrt{x}\sqrt{\cos x + \sqrt{x}}\sqrt{\sin x + \sqrt{\cos x + \sqrt{x}}}}$$

ب) داریم $f(\frac{\pi}{۳}) = \sqrt{۳}$ و $f^{-۱}(\sqrt{۳}) = \frac{\pi}{۳}$ و $f'(x) = \cos x - \sqrt{۳}\sin x$. بنابر این $(f^{-۱})'(\sqrt{۳}) = \frac{۱}{f'(\frac{\pi}{۳})} = \frac{۱}{-۱} = -۱$

اکنون معادله خط مماس مورد نظر برابر است با $y - \frac{\pi}{۳} = -(x - \sqrt{۳})$ و یا $y = -x + \sqrt{۳} + \frac{\pi}{۳}$



جواب سوال۵ : اگر نقطه $M = (x, y)$ روی منحنی $y^۲ = ۲x - x^۲$ واقع باشد آنگاه $y = \sqrt{۲x - x^۲}$ و مساحت مستطیل مورد نظر برابراست با :

$$S = xy = x\sqrt{۲x - x^۲}$$

اکنون باید ماکزیمم تابع $S(x) = x\sqrt{۲x - x^۲}$ را پیدا کنیم.

$$S'(x) = \sqrt{۲x - x^۲} + \frac{x(۲ - ۲x)}{۲\sqrt{۲x - x^۲}} \rightarrow S'(x) = \frac{x(۳ - ۲x)}{\sqrt{۲x - x^۲}}$$

اگر $S' = ۰$ آنگاه $x(۳ - ۲x) = ۰$. در $x = ۰$ مشتق وجود ندارد پس $x = \frac{۳}{۲}$ و در نتیجه :

$$Max\, S = \frac{۳}{۲}\sqrt{۲ \times \frac{۳}{۲} - (\frac{۳}{۲})^۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$$

سیدرضا موسوی